第27卷 第6期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 6
2010年12月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Dec. 2010

文章编号:1005-3085(2010)06-1075-11

$\mathcal{L}$集合范畴中的$\mathcal{L}$幺半群模*

张 红， 汤建钢， 李国华

(伊犁师范学院数学系，伊宁 835000)

摘 要: 本文引入以完备的Heyting代数为真值集$\mathcal{L}$集合范畴及$\mathcal{L}$幺半群范畴概念，构造了$\mathcal{L}$幺半群模结构与$\mathcal{L}$幺半群T代数结构；讨论了$\mathcal{L}$积函子F与$\mathcal{L}$幺半群单位函子G的伴随性，并证明了与该伴随对应的$\mathcal{L}$比较函子K是一个同构，从而得出$\mathcal{L}$幺半群单位函子G是$\mathcal{L}$可模的。

关键词: $\mathcal{L}$集合范畴；$\mathcal{L}$幺半群模；$\mathcal{L}$幺半群T代数；$\mathcal{L}$可模

分类号: **AMS**(2000) 03E72; 16D80; 18B99; 20N25 **中图分类号**: O154.1; O159 **文献标识码**: A

1 引言

1965年，美国控制论专家Zadeh提出模糊集概念，受到广泛的重视，迄今模糊集理论已较为完善。1980年，王世强[1]从模型论的角度，提出格值模型概念，该格值逻辑能用于解决命题演算及谓词演算中的独立性证明问题。文献[2-5]以格值模型理论为基础，给出以完全分配格为真值集的模糊集概念，并研究了各种模糊代数系统的数理逻辑基础，该工作使模糊集理论与格值逻辑建立起联系。

1969年，Lawvere和Tierney提出公理化连续变化集合范畴Topos概念。人们发现在一般Topos中存在子对象分类子(也称真值集)，该子对象分类子是一个完备的Heyting代数，它与以Brouwer为代表的唯心主义直觉逻辑代数结构具有一致性。由于模糊集的真值集$[0,1]$闭区间是一个完备的Heyting代数，从而引导我们从Topos的逻辑和直觉逻辑角度出发，提出新的集合模型，即将基于经典逻辑的布尔值模型提升到基于Topos的逻辑和直觉逻辑的$\mathcal{L}$集合模型，并研究其各种重要性质。

范畴论是Topos理论的基础，也是一种统一简洁的“符号语言”，因此我们在本文中将使用范畴论的语言研究$\mathcal{L}$集合理论。

本文首先给出$\mathcal{L}$集合范畴和$\mathcal{L}$幺半群范畴概念，并以此构造了$\mathcal{L}$幺半群模结构及$\mathcal{L}$幺半群T代数结构；最后证明$\mathcal{L}$比较函子K是一个同构，由此同构得出$\mathcal{L}$幺半群单位函子是$\mathcal{L}$可模的。

本文中Set表示集合范畴，$\mathcal{L}$表示完备的Heyting代数，即Locale[6]。

2 $\mathcal{L}$集合范畴、$\mathcal{L}$幺半群范畴

定义1 设$X\in ob(\mathrm{Set})$，则映射$A:X\longrightarrow\mathcal{L}$称为$X$的$\mathcal{L}$子集，偶序$(X,A)$称为$\mathcal{L}$集合。

定义2 设(X,A)，(Y,B)为两个$\mathcal{L}$集合，$f:X\longrightarrow Y$是映射，如果$A\leq B\circ f$，则称f是(X,A)到(Y,B)的$\mathcal{L}$映射。记作$f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$或$(X,A)\xrightarrow{f}(Y,B)$。

收稿日期: 2009-05-13. **作者简介**: 张红(1981年4月生)，女，硕士. 研究方向：代数与序结构.

***基金项目**: 国家自然科学基金(10871137)；伊犁师范学院2008年度大学生科研计划课题(2008XS06).

根据范畴的定义[7]可知，以全体$\mathcal{L}$集合为对象，$\mathcal{L}$映射为态射可构成一个范畴，称之为$\mathcal{L}$集合范畴，记作$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$。

注1 **1)** 两个$\mathcal{L}$映射$f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$，$g:(Y,B)\longrightarrow(Z,C)$的复合为映射的复合$g\circ f:(X,A)\longrightarrow(Z,C)$。因为$A\le B\circ f$，$B\le C\circ g$，故

$$A\le B\circ f\le(C\circ g)\circ f=C\circ(g\circ f),$$

复合的定义是合理的。

2) $\mathcal{L}$集合范畴$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$的单位态射是单位映射$I_{(X,A)}=1_X:(X,A)\longrightarrow(X,A)$。

定理1 设(X,A)，$(Y,B)\in ob\,\mathrm{Set}(\mathcal{L})$，则态射$f:(X,A)\to(Y,B)$是$\mathcal{L}$集合范畴$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$中的同构态射当且仅当$f:X\to Y$是一一映射，且$A=B\circ f$。

证明 充分性：若$f:X\to Y$是一一映射，则存在$g:Y\to X$，使得$g\circ f=1_X$，$f\circ g=1_Y$，由$A=B\circ f$，可知$f\in\hom_{\mathrm{Set}(\mathcal{L})}((X,A),(Y,B))$。再由$A=B\circ f$，可知

$$A\circ g=(B\circ f)\circ g=B\circ(f\circ g)=B\circ 1_Y=B,$$

故

$$B=A\circ g,\quad g\in\hom_{\mathrm{Set}(\mathcal{L})}\big((Y,B),(X,A)\big).$$

再由$g\circ f=1_X=1_{(X,A)}$，$f\circ g=1_Y=I_{(Y,B)}$可以知道，$\mathcal{L}$映射f是$\mathcal{L}$集合范畴$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$中的同构态射。

必要性：由于$\mathcal{L}$映射$f:(X,A)\to(Y,B)$是一个同构，故存在$\mathcal{L}$映射$g:(Y,B)\to(X,A)$，使得

$$g\circ f=1_{(X,A)}=1_X,\quad f\circ g=1_{(Y,B)}=1_Y,$$

故$f:X\to Y$可逆，即f为一一映射。又由于

$$A\le B\circ f\le(A\circ g)\circ f=A\circ(g\circ f)=A\circ 1_X=A,$$

从而$A=B\circ f$。 **证毕**

下文用Sg表示含幺元的半群范畴。

定义3 设$M\in ob(Sg)$，$\alpha:M\to\mathcal{L}$是映射，如果：

1) 对任意$x,y\in M$有$\alpha(xy)\ge\alpha(x)\wedge\alpha(y)$；

2) $\alpha(e)=1$，其中e是M的幺元，则称α是M的一个$\mathcal{L}$幺子半群，偶序(M,α)称为一个$\mathcal{L}$幺半群。

定义4 设(M,α)，(N,β)是$\mathcal{L}$幺半群，$f:M\to N$是半群同态且满足$A\le B\circ f$，则称f是(M,α)到(N,β)的$\mathcal{L}$幺半群同态。记作$f:(M,\alpha)\longrightarrow(N,\beta)$，或$(M,\alpha)\xrightarrow{f}(N,\beta)$。

易知，以全体$\mathcal{L}$幺半群为对象，$\mathcal{L}$幺半群同态为态射可以构成一个范畴，我们称之为$\mathcal{L}$幺半群范畴。记作$Sg(\mathcal{L})$。

3 $\mathcal{L}$幺半群模

定义5 设$T=(M,\alpha)\times(\ ):\mathrm{Set}(\mathcal{L})\to\mathrm{Set}(\mathcal{L})$，其中$(M,\alpha)$为$\mathcal{L}$幺半群。如果$T$满足下面两个条件：

(A_1) 对任意

$$(X,A)\in ob\big(\mathrm{Set}(\mathcal{L})\big),\quad T(X,A)=(M,\alpha)\times(X,A)=\big(M\times X,\ \alpha p_1\wedge Ap_2\big);$$

(A_2) 对任意$\mathcal{L}$映射

$$f:(X,A)\to(Y,B),\quad T(f)=1_M\times f:(M,\alpha)\times(X,A)\to(M,\alpha)\times(Y,B),$$

其中$p_1:M\times X\to M$，$p_2:M\times X\to X$分别为投影映射，$(1_M\times f)(m,x)=(m,f(x))$。这里$m\in M$，$x\in X$，则$T$是一个从范畴$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$到范畴$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$的函子，我们称之为$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$上关于$(M,\alpha)$的$\mathcal{L}$幺半群积函子，简称$\mathcal{L}$积函子，又称为$\mathcal{L}$幺半群在$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$上的积作用。易验证$T(f)$，即$1_M\times f$为一个$\mathcal{L}$映射，称为$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$上关于$(M,\alpha)$的$\mathcal{L}$积映射，简称为$\mathcal{L}$积映射。

注2 **1)** $\mathcal{L}$积映射可以进行复合。即若

$$(M,\alpha)\times(X,A)\xrightarrow{1_M\times f}(M,\alpha)\times(Y,B)\xrightarrow{1_M\times f'}(M,\alpha)\times(Z,C),$$

则$(1_M\times f')\circ(1_M\times f)=1_M\times(f'\circ f)$。

2) $\mathcal{L}$积映射满足结合律。即若

$$(M,\alpha)\times(X,A)\xrightarrow{1_M\times f}(M,\alpha)\times(Y,B)\xrightarrow{1_M\times f'}(M,\alpha)\times(Z,C)\xrightarrow{1_M\times f''}(M,\alpha)\times(U,D),$$

则根据$\mathcal{L}$映射的结合律得$(f''\circ f')\circ f=f''\circ(f'\circ f)$，从而

$$1_M\times\big((f''\circ f')\circ f\big)=1_M\times\big(f''\circ(f'\circ f)\big).$$

再由注1可知

$$1_M\times\big((f''\circ f')\circ f\big)=\big(1_M\times(f''\circ f')\big)\circ(1_M\times f)=\big((1_M\times f'')\circ(1_M\times f')\big)\circ(1_M\times f).$$

类似可知

$$1_M\times\big(f''\circ(f'\circ f)\big)=(1_M\times f'')\circ\big((1_M\times f')\circ(1_M\times f)\big),$$

所以

$$\big((1_M\times f'')\circ(1_M\times f')\big)\circ(1_M\times f)=(1_M\times f'')\circ\big((1_M\times f')\circ(1_M\times f)\big).$$

3) $\mathcal{L}$积映射

$$I_{(M,\alpha)}\times I_{(Y,B)}=1_M\times 1_Y:(M,\alpha)\times(Y,B)\to(M,\alpha)\times(Y,B),$$

满足对任意的

$$1_M\times f:(M,\alpha)\times(Y,B)\to(M,\alpha)\times(Y',B'),$$
$$1_M\times g:(M,\alpha)\times(Z,C)\to(M,\alpha)\times(Y,B),$$

下列等式成立

$$(1_M\times f)\circ(1_M\times 1_Y)=1_M\times f,\quad (1_M\times 1_Y)\circ(1_M\times g)=1_M\times g,$$

其中$(Y,B)\in\mathrm{Set}(\mathcal{L})$。

由上述分析可知以形如$(M,\alpha)\times(X,A)$的乘积族为对象，$\mathcal{L}$积映射为态射可构成一个范畴，称为$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$上关于$(M,\alpha)$的$\mathcal{L}$积幺半群范畴，在不引起混淆的情况，简称为$\mathcal{L}$积幺半群范畴。将其记作$(M,\alpha)\times\mathrm{Set}(\mathcal{L})$，其中$(M,\alpha)$为$\mathcal{L}$幺半群。

引理1 设 (M,α) 为 $\mathcal{L}$ 幺半群，定义 $\eta : I_{\mathrm{Set}(\mathcal{L})} \to T$，满足对任意 $(X,A) \in ob(\mathrm{Set}(\mathcal{L}))$，有 $\eta_{(X,A)} : I_{\mathrm{Set}(\mathcal{L})}(X,A) \to T(X,A)$，即

$$(X,A) \xrightarrow{\eta_{(X,A)}} (M,\alpha) \times (X,A),$$

其中 $\eta_{(X,A)}(x) = (e,x)$，则 η 为一个自然变换。

证明 根据范畴中自然变换的定义[7]，首先证明 η 定义的合理性，即证明对任意 $(X,A) \in ob(\mathrm{Set}(\mathcal{L}))$，$\eta_{(X,A)}$ 是 $\mathcal{L}$ 映射。由于

$$(\alpha p_1 \wedge Ap_2)\eta_{(X,A)}(x) = (\alpha p_1 \wedge Ap_2)(e,x) = \alpha(e) \wedge A(x) = 1 \wedge A(x) = A(x),$$

所以 $A \le (\alpha p_1 \wedge Ap_2)\eta_{(X,A)}$。这说明 $\eta_{(X,A)}$ 是一个 $\mathcal{L}$ 映射，所以 η 定义是合理的。

再证对任意 $\mathcal{L}$ 映射 $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$，下面的图表可交换

$$\begin{array}{ccc} I(X,A) & \xrightarrow{\eta_{(X,A)}} & (M,\alpha) \times (X,A) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_M \times f} \\ I(Y,B) & \xrightarrow{\eta_{(Y,B)}} & (M,\alpha) \times (Y,B) \end{array}$$

由于

$$(1_M \times f) \circ \eta_{(X,A)}(x) = (1_M \times f)(e,x) = \big(e, f(x)\big),$$

$$\eta_{(Y,B)} \circ f(x) = \eta_{(Y,B)}\big(f(x)\big) = \big(e, f(x)\big),$$

故 $(1_M \times f) \circ \eta_{(X,A)}(x) = \eta_{(Y,B)} \circ f(x)$。又有

$$(\alpha p_1 \wedge Ap_2)\big(e, f(x)\big) = \alpha(e) \wedge B\big(f(x)\big) = 1 \wedge B\big(f(x)\big) = B\big(f(x)\big),$$

$$(\alpha p_1 \wedge Ap_2)\eta_{(X,A)}(x) = A(x),$$

由于 $A(x) \le B(f(x))$，可知 $(1_M \times f) \circ \eta_{(X,A)}$，$\eta_{(Y,B)} \circ f$ 在 (X,A) 上的作用是合理的，故上面图表可交换。根据范畴上自然变换的定义，这就证明了 η 是一个自然变换。

我们称上述自然变换为 $\mathrm{Set}(\mathcal{L})$ 上关于 (M,α) 的 $\mathcal{L}$ 幺半群单位自然变换，简称为 $\mathcal{L}$ 单位自然变换。

引理2 设 (M,α) 为 $\mathcal{L}$ 幺半群，定义 $\mu : TT \to T$，满足：对任意 $(X,A) \in ob(\mathrm{Set}(\mathcal{L}))$，有 $\mu_{(X,A)} : TT(X,A) \to T(X,A)$，即

$$(M,\alpha) \times \big((M,\alpha) \times (X,A)\big) \xrightarrow{\mu_{(X,A)}} (M,\alpha) \times (X,A),$$

其中 $\mu_{(X,A)}(m,(n,x)) = (mn,x)$。这里 $m,\ n \in M$，$x \in X$，mn 为幺半群 M 上 m 与 n 的乘法运算，则 μ 为一个自然变换。

证明 首先证明 μ 定义的合理性，即证明对任意 $(X,A) \in ob(\mathrm{Set}(\mathcal{L}))$，$\mu_{(X,A)}$ 是一个 $\mathcal{L}$ 映射。由于

$$(M,\alpha) \times \big((M,\alpha) \times (X,A)\big) = \big(M \times (M \times X), \alpha p_1 \wedge (\alpha p_2 \wedge Ap_3)\big),$$

$$(M,\alpha) \times (X,A) = (M \times X, \alpha p_1 \wedge Ap_2),$$

又知

$$\begin{aligned}
&\big(\alpha p_1 \wedge (\alpha p_2 \wedge A p_3)\big)\big(m,(n,x)\big)\\
=\ &\alpha(m) \wedge \big(\alpha(n) \wedge A(x)\big)\\
=\ &\alpha(m) \wedge \alpha(n) \wedge A(x)(\alpha p_1 \wedge A p_2)(mn,x) = \alpha(mn) \wedge A(x),
\end{aligned}$$

显然知$\alpha(mn) \wedge A(x) \geq \alpha(m) \wedge \alpha(n) \wedge A(x)$，故$(\alpha p_1 \wedge A p_2)\mu_{(X,A)} \geq \alpha p_1 \wedge (\alpha p_2 \wedge A p_3)$。说明$\mu_{(X,A)}$是$\mathcal{L}$映射，所以$\mu$的定义是合理的。

再证对任意$\mathcal{L}$映射$f:(X,A) \longrightarrow (Y,B)$，下面的图表可交换

$$\begin{array}{ccc}
(M,\alpha)\times\big((M,\alpha)\times(X,A)\big) & \xrightarrow{\mu_{(X,A)}} & (M,\alpha)\times(X,A)\\
\Big\downarrow{\scriptstyle 1_M\times(1_M\times f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle 1_M\times f}\\
(M,\alpha)\times\big((M,\alpha)\times(Y,B)\big) & \xrightarrow{\mu_{(Y,B)}} & (M,\alpha)\times(Y,B)
\end{array}$$

由于

$$\begin{aligned}
&(1_M \times f)\circ\mu_{(X,A)}\big(m,(n,x)\big) = (1_M \times f)(mn,x) = \big(mn,f(x)\big),\\
&\mu_{(Y,B)}\circ\big(1_M \times (1_M \times f)\big)\big(m,(n,x)\big) = \mu_{(Y,B)}\big(m,(n,f(x))\big) = \big(mn,f(x)\big),
\end{aligned}$$

易见$(1_M \times f)\circ\mu_{(X,A)}$和$\mu_{(Y,B)}\circ(1_M \times (1_M \times f))$在$(M,\alpha)\times((M,\alpha)\times(X,A))$上的作用也是合理的。故$(1_M \times f)\circ\mu_{(X,A)} = \mu_{(Y,B)}\circ(1_M \times (1_M \times f))$。

从而上面图表可交换，根据范畴上自然变换的定义，这就证明了μ是一个自然变换。

我们称$\mu: TT \to T$为$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$上关于$(M,\alpha)$的$\mathcal{L}$幺半群$\mu$自然变换，简称$\mathcal{L}-\mu$自然变换。

定理2 如上定义的T, μ, η构成$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$上的一个模$(T,\ \mu,\ \eta)$。

证明 根据范畴上模的定义[6]，只需证明，对任意$(X,A)\in ob(\mathrm{Set}(\mathcal{L}))$，上文定义的$\mathcal{L}$积函子$T$, $\mathcal{L}$单位自然变换μ, $\mathcal{L}-\mu$自然变换η满足下面两个图表可交换

$$\begin{array}{ccc}
(M,\alpha)\times\big((M,\alpha)\times(X,A)\big) & \xleftarrow{\eta_{(M,\alpha)\times(X,A)}} & (M,\alpha)\times(X,A)\\
\Big\uparrow{\scriptstyle 1_M\times\eta_{(X,A)}} & \searrow{\scriptstyle \mu_{(X,A)}} & \Big\downarrow{\scriptstyle 1_M\times 1_X}\\
(M,\alpha)\times(X,A) & \xrightarrow[1_M\times 1_X]{} & (M,\alpha)\times(X,A)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(M,\alpha)\times\{(M,\alpha)\times[(M,\alpha)\times(X,A)]\} & \xrightarrow{1_M\times\mu_{(X,A)}} & (M,\alpha)\times[(M,\alpha)\times(X,A)]\\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{(M,\alpha)\times(X,A)}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{(X,A)}}\\
(M,\alpha)\times\big((M,\alpha)\times(X,A)\big) & \xrightarrow{\mu_{(X,A)}} & (M,\alpha)\times(X,A)
\end{array}$$

在第一个图表中，对任意$(m,x)\in M\times X$，由于

$$\begin{aligned}
\big(\mu_{(X,A)}\circ\eta_{(M,\alpha)\times(X,A)}\big)(m,x) &= \mu_{(X,A)}\big(e,(m,x)\big) = (em,x) = (m,x),\\
\big(\mu_{(X,A)}\circ(1_M \times \eta_{(X,A)})\big)(m,x) &= \mu_{(X,A)}\big(m,(e,x)\big) = (me,x)\\
&= (m,x)(1_M \times 1_X)(m,x) = (m,x),
\end{aligned}$$

可知

$$\mu_{(X,A)}\circ\eta_{(M,\alpha)\times(X,A)}(m,x)=\mu_{(X,A)}\circ\big(1_M\times\eta_{(X,A)}\big)(m,x)=(1_M\times 1_X)(m,x).$$

再由

$$\begin{aligned}&(\alpha p_1\wedge Ap_2)(m,x)=\alpha(m)\wedge A(x),\\&\big(\alpha p_1\wedge(\alpha p_2\wedge Ap_3)\big)\big(\eta_{(M,\alpha)\times(X,A)}(m,x)\big)\\=&\ \big(\alpha P_1\wedge(\alpha p_2\wedge Ap_3)\big)\big(e,(m,x)\big)=\alpha(e)\wedge\big(\alpha(m)\wedge A(x)\big)=\alpha(m)\wedge A(x),\\&(\alpha p_1\wedge Ap_2)\big(\mu_{(X,A)}\circ\eta_{(M,\alpha)\times(X,A)}(m,x)\big)=(\alpha p_1\wedge Ap_2)(m,x)=\alpha(m)\wedge A(x),\end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned}(\alpha p_1\wedge Ap_2)(m,x)&=\big(\alpha p_1\wedge(\alpha p_2\wedge Ap_3)\big)\big(\eta_{(M,\alpha)\times(X,A)}(m,x)\big)\\&=(\alpha p_1\wedge Ap_2)\big(\mu_{(X,A)}\circ\eta_{(M,\alpha)\times(X,A)}(m,x)\big),\end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned}&\big(\alpha p_1\wedge(\alpha p_2\wedge Ap_3)\big)\big(1_M\times\eta_{(X,A)}(m,x)\big)\\=&\ \big(\alpha p_1\wedge(\alpha p_2\wedge Ap_3)\big)\big(m,(e,x)\big)=\alpha(m)\wedge\big(\alpha(e)\wedge A(x)\big)=\alpha(m)\wedge A(x),\\&(\alpha p_1\wedge Ap_2)\big(\mu_{(X,A)}\circ(1_M\times\eta_{(X,A)})(m,x)\big)=(\alpha p_1\wedge Ap_2)(m,x)=\alpha(m)\wedge A(x),\end{aligned}$$

可知

$$\alpha p_1\wedge Ap_2=\big(\alpha p_1\wedge(\alpha p_2\wedge Ap_3)\big)\big(1_M\times\eta_{(X,A)}\big)=(\alpha p_1\wedge Ap_2)\big(\mu_{(X,A)}\circ(1_M\times\eta_{(X,A)})\big).$$

这说明，$\mu_{(X,A)}\circ\eta_{(M,\alpha)\times(X,A)}$ 和 $\mu_{(X,A)}\circ(1_M\times\eta_{(X,A)})$ 在 $(M,\alpha)\times(X,A)$ 上的作用是合理的。

由此可得

$$\mu_{(X,A)}\circ\eta_{(M,\alpha)\times(X,A)}=\mu_{(X,A)}\circ\big(1_M\times\eta_{(X,A)}\big)=1_M\times 1_X.$$

故第一个图表可交换。类似可得，第二个图表可交换。

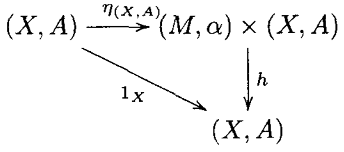
所以 $\mathcal{L}$ 积函子 T, $\mathcal{L}-\mu$ 自然变换 μ, $\mathcal{L}$ 单位自然变换 η 构成 Set($\mathcal{L}$) 上的一个模 (T, μ, η)，称为 Set($\mathcal{L}$) 上关于 (M,α) 的 $\mathcal{L}$ 幺半群模，简称 $\mathcal{L}$ 幺半群模。 **证毕**

4 $\mathcal{L}$ 幺半群 T 代数

定义6 设 (T, μ, η) 是 Set($\mathcal{L}$) 上关于 (M,α) 的 $\mathcal{L}$ 幺半群模，对某 $(X,A)\in ob(\mathrm{Set}(\mathcal{L}))$，令 $h:(M,\alpha)\times(X,A)\to(X,A)$，其中对任意 $(m,x)\in M\times X$，$h(m,x)=mx$，且 $A(mx)\geq\alpha(m)\wedge A(x)$。这里 $mx=m\cdot x$ 表示幺半群 M 在集合 X 上的作用；当 $m=e$ 时，$ex=x$。则易知 h 是一个 $\mathcal{L}$ 映射，称为 $\mathcal{L}$ 幺半群模关于 (X,A) 的 $\mathcal{L}$ 映射，简称 $\mathcal{L}$ 幺半群模映射。

定理3 如上定义的 $[(X,A),h]$ 是 Set($\mathcal{L}$) 上的一个 T 代数。

证明 由 h 的定义已知 h 是一个 $\mathcal{L}$ 映射，根据范畴上 T 代数的定义[7]，只需再证明下面两个图表可交换



$$\begin{array}{ccc}(M,\alpha)\times\big((M,\alpha)\times(X,A)\big) & \xrightarrow{1_M\times h} & (M,\alpha)\times(X,A)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle\mu_{(X,A)}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h}\\ (M,\alpha)\times(X,A) & \xrightarrow{\quad h\quad} & (X,A)\end{array}$$

易验证上面第1图表是交换的。只需考虑

$$h\circ\eta_{(X,A)}(x)=h(e,x)=ex=x,\quad A(h\circ\eta_{(X,A)}(x))=A(x),\quad \forall\, x\in X.$$

在第2个图表中，对任意$(m,(n,x))\in M\times(M\times X)$，由于

$$h\circ(1_M\times h)\big(m,(n,x)\big)=h(m,nx)=m(nx)=(mn)x,$$

$$h\circ\mu_{(X,A)}\big(m,(n,x)\big)=h(mn,x)=(mn)x,$$

可知

$$h\circ(1_M\times h)\big(m,(n,x)\big)=h\circ\mu_{(X,A)}(m,(n,x)).$$

再由

$$\begin{aligned}\big(\alpha p_1\wedge(\alpha p_2\wedge Ap_3)\big)\big(m,(n,x)\big)&=\alpha(m)\wedge\alpha(n)\wedge A(x),\\ (\alpha p_1\wedge Ap_2)\big((1_M\times h)\big(m,(n,x)\big)\big)&=(\alpha p_1\wedge Ap_2)(m,nx)\\ &=\alpha(m)\wedge A(nx)\geq\alpha(m)\wedge(\alpha(n)\wedge A(x))\\ &=\alpha(m)\wedge\alpha(n)\wedge A(x),\\ A\big(\big(h\circ(1_M\times h)\big)\big(m,(n,x)\big)\big)&=A\big(h(m,nx)\big)=A(m(nx))\geq\alpha(m)\wedge A(nx),\end{aligned}$$

可知

$$A\big(h\circ(1_M\times h)\big)\geq(\alpha p_1\wedge Ap_2)(1_M\times h)\geq\alpha P_1\wedge(\alpha p_2\wedge Ap_3).$$

又由

$$\begin{aligned}(\alpha p_1\wedge Ap_2)\big(\mu_{(X,A)}\big(m,(n,x)\big)\big)&=(\alpha p_1\wedge Ap_2)(mn,x)\\ &=\alpha(mn)\wedge A(x)\geq\alpha(m)\wedge\alpha(n)\wedge A(x),\\ A\big[\big(h\circ\mu_{(X,A)}\big)\big(m,(n,x)\big)\big]&=A\big(h(mn,x)\big)=A\big((mn)x\big)\geq\alpha(mn)\wedge A(x),\end{aligned}$$

可知

$$A\big(h\circ\mu_{(X,A)}\big)\geq(\alpha p_1\wedge Ap_2)\mu_{(X,A)}\geq\alpha p_1\wedge(\alpha p_2\wedge Ap_3).$$

这说明$h\circ(1_M\times h)$和$h\circ\mu_{(X,A)}$在$M\times(M\times X)$上的作用是合理的。

由此可得$h\circ(1_M\times h)=h\circ\mu_{(X,A)}$。故第2个图表也可交换。

所以$[(X,A),h]$是$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$上的一个$T$代数，称为$[(X,A),h]$为$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$上$(X,A)$关于$(M,\alpha)$的$\mathcal{L}$幺半群$T$代数，简称$\mathcal{L}$幺半群$T$代数。

注3 对任意的$(X,A)\in ob(\mathrm{Set}(\mathcal{L}))$，$[T(X,A),\mu_{(X,A)}]$是一个$\mathcal{L}$幺半群$T$代数。

定义7 设$[(X,A),h]$，$[(Y,B),r]$是$\mathcal{L}$幺半群T代数，设$\mathcal{L}$映射$f:(X,A)\to(Y,B)$满足下面图表可交换，即$r\circ T(f)=f\circ h$。

$$\begin{array}{ccc}(M,\alpha)\times(X,A) & \xrightarrow{1_M\times f} & (M,\alpha)\times(Y,B)\\ \downarrow h & & \downarrow r\\ (X,A) & \xrightarrow{\quad f\quad} & (Y,B)\end{array}$$

则称$\mathcal{L}$映射f是$\mathcal{L}$幺半群T代数$[(X,A),h]$到$[(Y,B),r]$的$\mathcal{L}$幺半群T代数映射，简称$\mathcal{L}$幺半群T代数映射。

以全体$\mathcal{L}$幺半群T代数为对象，$\mathcal{L}$幺半群T代数映射为态射可构成一个范畴，称为$\mathcal{L}$幺半群T代数范畴，记作$[\mathrm{Set}(\mathcal{L})]^T$。

注4 **1)** $\mathcal{L}$幺半群T代数映射可以复合并满足结合律。

2) $\mathcal{L}$幺半群T代数范畴中的单位态射是$1_{(Y,B)}=1_Y:[(Y,B),r]\to[(Y,B),r]$。

定义8 设$G^T:[\mathrm{Set}(\mathcal{L})]^T\to\mathrm{Set}(\mathcal{L})$。如果$G^T$满足条件：

(A_1) 对任意$[(X,A),h]\in ob([\mathrm{Set}(\mathcal{L})]^T)$，$G^T[(X,A),h]=(X,A)$。

(A_2) 对任意$\mathcal{L}$映射$f:G^T(f)=f:(X,A)\to(Y,B)$，则易验证G^T是一个函子，称为范畴$[\mathrm{Set}(\mathcal{L})]^T$到$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$的$\mathcal{L}$幺半群遗忘函子，简称为$\mathcal{L}$幺半群遗忘函子。

5 $\mathcal{L}$幺半群单位函子是$\mathcal{L}$可模的

令$(N,\alpha)\in Sg(\mathcal{L})$，$N\subset M$，$\alpha(n)=1$，其中$n\in N$。即，$(N,\alpha)$是$(M,\alpha)$的满足$\alpha(n)=1$的子幺半群。根据上文可对偶地给出范畴$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$上关于子幺半群$(N,\alpha)$的所有定义。在不引起混淆的情况下，下文的简称将指代$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$上关于$(N,\alpha)$的相关概念，如$\mathcal{L}$积函子是$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$上关于$(N,\alpha)$的$\mathcal{L}$幺半群积函子的简称。

定义9 对任意$(X,A)\in ob(\mathrm{Set}(\mathcal{L}))$，令函子$F^T:\mathrm{Set}(\mathcal{L})\to[\mathrm{Set}(\mathcal{L})]^T$满足条件：

1) $F^T(X,A)=[T(X,A),\mu_{(X,A)}]$；

2) 对于任意$\mathcal{L}$映射

$$f:(X,A)\to(Y,B),\quad F^T(f)=T(f)=1_N\times f:(N,\alpha)\times(X,A)\to(N,\alpha)\times(Y,B),$$

我们称函子F^T为从范畴$\mathrm{Set}(\mathcal{L})$到范畴$[\mathrm{Set}(\mathcal{L})]^T$的$\mathcal{L}$幺半群扩充函子，简称为$\mathcal{L}$幺半群扩充函子。

事实上，由引理2证明可知$T(f)\circ\mu_{(X,A)}=\mu_{(Y,B)}\circ TT(f)$，再由定义7，可知$1_N\times f$是$\mathcal{L}$幺半群$T$代数$[(N,\alpha)\times(X,A),\mu_{(X,A)}]$到$[(N,\alpha)\times(Y,B),\mu_{(Y,B)}]$的$\mathcal{L}$幺半群$T$代数映射，从而保证了上述定义中条件2)的合理性。

以形如$[T(X,A),\mu_{(X,A)}]$的$\mathcal{L}$幺半群T代数全体为对象，形如$1_N\times f$的$\mathcal{L}$幺半群T代数映射为态射可构成一个范畴，记作$\mathcal{D}^T$。

引理3 $\mathcal{L}$幺半群扩充函子F^T与$\mathcal{L}$幺半群遗忘函子G^T是一对伴随函子，F^T为左伴随，G^T为右伴随，即$F^T\dashv G^T$。

证明 对任意(X,A), $(Y,B)\in ob(\mathrm{Set}(\mathcal{L}))$，下面考虑映射

$$\varphi_{(X,Y)}:\mathrm{Hom}\big([(N,\alpha)\times(X,A),\mu_{(X,A)}],[(N,\alpha)\times(Y,B),\mu_{(Y,B)}]\big)$$
$$\to\mathrm{Hom}\big((X,A),(N,\alpha)\times(Y,B)\big),$$

若存在$\mathcal{L}$幺半群T代数映射

$$f:\big[\big((N,\alpha)\times(X,A),\mu_{(X,A)}\big)\big]\to\big[(N,\alpha)\times(Y,B),\mu_{(Y,B)}\big],$$

则对任意 $(n,x) \in N \times X$，有 $f(n,x) = (n,y)$ 且 $\alpha(n) \wedge A(x) \leq \alpha(n) \wedge B(y)$，由 $f(n,x) = (n,y)$ 可知 $f(x) = y$，则存在由 f 诱导的映射 $f_n : X \to N \times Y$，使得 $f_n(x) = (n,y)$。由于 $\alpha(n) = 1$，所以 $\alpha(n) \wedge A(x) \leq \alpha(n) \wedge B(y)$ 可转化为 $A(x) \leq \alpha(n) \wedge B(y)$。从而 f_n 为从 (X,A) 到 $(N,\alpha) \times (Y,B)$ 的 $\mathcal{L}$ 映射。反之，若存在 $\mathcal{L}$ 映射 $f_n : (X,A) \to (N,\alpha) \times (Y,B)$，使得 $f_n(x) = (n,y)$，并且 $A(x) \leq \alpha(n) \wedge B(y)$，则存在 f_n 诱导的映射 $f : X \to Y$ 使得 $f(x) = y$，从而存在映射 $T(f) = 1_N \times f : N \times X \to N \times Y$，使得 $(1_N \times f)(n,x) = (n,y)$。由于 $\alpha(n) = 1$，所以 $A(x) \leq \alpha(n) \wedge B(y)$ 可转化为 $\alpha(n) \wedge A(x) \leq \alpha(n) \wedge B(y)$。从而 $1_N \times f$ 为从 $(N,\alpha) \times (X,A)$ 到 $(N,\alpha) \times (Y,B)$ 的 $\mathcal{L}$ 映射。由注记3可知

$$\big[(N,\alpha) \times (X,A),\, \mu_{(X,A)}\big], \quad \big[(N,\alpha) \times (Y,B),\, \mu_{(Y,B)}\big]$$

是 $\mathcal{L}$ 幺半群 T 代数，而根据定义9可知，$1_N \times f$ 是 $\mathcal{L}$ 幺半群 T 代数 $[(N,\alpha)\times(X,A), \mu_{(X,A)}]$ 到 $[(N,\alpha) \times (Y,B), \mu_{(Y,B)}]$ 的 $\mathcal{L}$ 幺半群 T 代数映射。

这说明 $\varphi_{(X,Y)}$ 是一一到上的映射。根据伴随函子的等价定义[7]，从而易验证 F^T 与 G^T 构成一对伴随函子，F^T 为左伴随，G^T 为右伴随，即 $F^T \dashv G^T$。 **证毕**

定义10 设 $1_N \times 1 : (N,\alpha) \times \mathrm{Set}(\mathcal{L}) \longrightarrow (N,\alpha) \times \mathrm{Set}(\mathcal{L})$，满足条件：

1) 对任意 $(N,\alpha) \times (X,A) \in (N,\alpha) \times \mathrm{Set}(\mathcal{L})$，有下式成立

$$(1_N \times 1)\big((N,\alpha) \times (X,A)\big) = (N,\alpha) \times (X,A);$$

2) 对任意 $1_N \times f : (N,\alpha) \times (X,A) \longrightarrow (N,\alpha) \times (Y,B)$，有下式成立

$$(1_N \times 1)(1_N \times f) = 1_N \times f,$$

则 $1_N \times 1$ 是一个函子，我们称之为从 $(N,\alpha) \times \mathrm{Set}(\mathcal{L})$ 到 $(N,\alpha) \times \mathrm{Set}(\mathcal{L})$ 的 $\mathcal{L}$ 幺半群单位函子，简称 $\mathcal{L}$ 幺半群单位函子。

引理4 $\mathcal{L}$ 积函子 $F : \mathrm{Set}(\mathcal{L}) \to (N,\alpha) \times \mathrm{Set}(\mathcal{L})$ 与 $\mathcal{L}$ 幺半群单位函子 $G : (N,\alpha) \times \mathrm{Set}(\mathcal{L}) \to (N,\alpha) \times \mathrm{Set}(\mathcal{L})$ 是一对伴随函子，且 F 为左伴随，G 为右伴随，即 $F \dashv G$。

证明 类似于引理3的证法，从略。

定义11 设 $K : (N,\alpha) \times \mathrm{Set}(\mathcal{L}) \to \mathcal{D}^T$，满足条件：

1) 对任意 $(N,\alpha) \times (X,A) \in ob((N,\alpha) \times \mathrm{Set}(\mathcal{L}))$，有下面等式成立

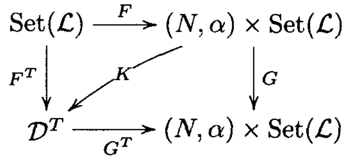
$$K\big((N,\alpha) \times (X,A)\big) = \big[(N,\alpha) \times (X,A), \mu_{(X,A)}\big];$$

2) 对任意 $\mathcal{L}$ 积映射 $T(f) = 1_N \times f : (N,\alpha) \times (X,A) \to (N,\alpha) \times (Y,B)$，有下面等式成立

$$\begin{aligned} K\big(T(f)\big) &= K(1_N \times f) = T(f) \\ &= 1_N \times f : \big[(N,\alpha) \times (X,A),\, \mu_{(X,A)}\big] \to \big[(N,\alpha) \times (Y,B),\, \mu_{(Y,B)}\big], \end{aligned}$$

则 K 为一个函子，称作伴随 $F \dashv G$ 与伴随 $F^T \dashv G^T$ 的 $\mathcal{L}$ 比较函子，简称 $\mathcal{L}$ 比较函子。

引理5 $\mathcal{L}$ 比较函子 K 是使得 $G^T K = G$, $KF = F^T$ 成立的唯一函子，即 K 是满足下列图表中两个三角形可交换的唯一函子。



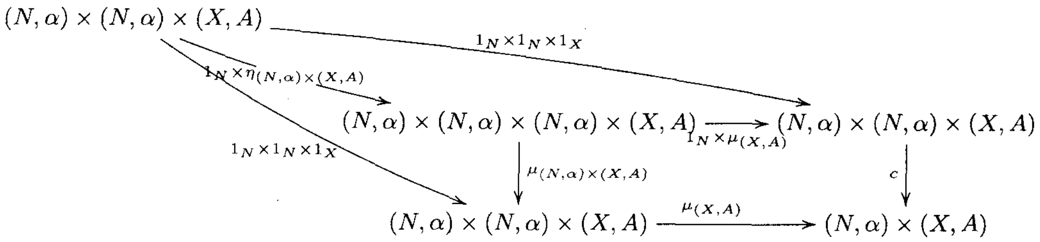
证明 首先易知$\mathcal{L}$比较函子K满足$G^TK=G$, $KF=F^T$成立。只需再验证唯一性。假设另有函子$K':(N,\alpha)\times \mathrm{Set}(\mathcal{L})\to \mathcal{D}^T$满足$G^TK'=G$, $K'F=F^T$成立，则对任意$\mathcal{L}$积映射$1_N\times f:(N,\alpha)\times(X,A)\to(N,\alpha)\times(Y,B)$，由$G^TK'=G'$可知

$$K'(1_N\times f)=G(1_N\times f):G\big((N,\alpha)\times(X,A)\big)\to G\big((N,\alpha)\times(Y,B)\big),$$

即

$$K'(1_N\times f)=1_N\times f:(N,\alpha)\times(X,A)\to(N,\alpha)\times(Y,B),$$

因此$K'((N,\alpha)\times(X,A))$是一个形如$[(N,\alpha)\times(X,A),c]$的幺半群$T$代数，我们只需说明$c=\mu_{(X,A)}$。由于$c$, $\mu_{(X,A)}$是$\mathcal{L}$幺半群T代数映射，考虑下面的图表



该图表的方形和两三角形都交换，所以最外面的四边形可交换，故$c=\mu_{(X,A)}$。这说明满足$G^TK=G$, $KF=F^T$的函子唯一。 **证毕**

定理4 $\mathcal{L}$比较函子K是一个同构函子。

证明 易知$(N,\alpha)\times\mathrm{Set}(\mathcal{L})$与$\mathcal{D}^T$中的对象一一对应。对任意$(X,A)\in ob(\mathrm{Set}(\mathcal{L}))$, $(N,\alpha)\times(X,A)$对应于$[(N,\alpha)\times(X,A),\mu_{(X,A)}]$。

考虑任意

$$(N,\alpha)\times(X,A)\ \underset{1_N\times f}{\overset{1_N\times g}{\rightrightarrows}}\ (N,\alpha)\times(Y,B),$$

令$K(1_N\times f)=K(1_N\times g)$，即有$1_N\times f=1_N\times g$。这说明$K$是局部单的。

对任意

$$1_N\times f:\big[(N,\alpha)\times(X,A),\mu_{(X,A)}\big]\to\big[(N,\alpha)\times(Y,B),\mu_{(Y,B)}\big],$$

都存在一个$\mathcal{L}$积映射$1_N\times f:(N,\alpha)\times(X,A)\to(N,\alpha)\times(Y,B)$，使得$K(1_N\times f)=1_N\times f$。这说明$K$是局部满的。

根据范畴上同构函子的等价定义[7]，这便验证了$\mathcal{L}$比较函子K是一个同构函子。由函子可模的定义[7]即有下面定理成立。

定理5 $\mathcal{L}$幺半群单位函子G是可模的。

我们称$\mathcal{L}$幺半群单位函子G为$\mathcal{L}$可模的。

参考文献：

[1] 王世强. 格值模型论中紧致性定理的一种证法[J]. 北京师范大学学报，1980, 3-4: 25-30
Wang S Q. A proof of compactness theorem in lattice-valued model theory[J]. Journal of Beijing Normal University, 1980, 3-4: 25-30

[2] 汤建钢. 格化代数学(I)[J]. 伊犁师范学院学报，1989, 1: 1-17
Tang J G. Lattice-valued algebra(I)[J]. Journal of Yili Normal University, 1989, 1: 1-17
[3] 汤建钢. 格化代数学(II)[J]. 伊犁师范学院学报，1992, 1: 13-23
Tang J G. Lattice-valued algebra(II)[J]. Journal of Yili Normal University, 1992, 1: 13-23
[4] 汤建钢. 格化代数学(III)[J]. 伊犁师范学院学报，1993, 1: 1-4
Tang J G. Lattice-valued algebra(III)[J]. Journal of Yili Normal University, 1993, 1: 1-4
[5] 汤建钢. 格化代数学(IV)[J]. 伊犁师范学院学报，1994, 1: 1-5
Tang J G. Lattice-valued algebra(IV)[J]. Journal of Yili Normal University, 1994, 1: 1-5
[6] Francis Borceux. Handbook of Categorical Algebra 3[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1994
[7] 贺伟. 范畴论[M]. 北京：科学出版社，2006
He W. Category Theory[M]. Beijing: Science Press, 2006

The $\mathcal{L}$ Unitary Semi-group Monad in the Category of $\mathcal{L}$ Sets

ZHANG Hong, TANG Jian-gang, LI Guo-hua

(Department of Mathematics, Yili Normal University, Yining 835000)

Abstract: In this paper we introduce the category of $\mathcal{L}$ sets and the category of $\mathcal{L}$ unitary semi-groups, whose true value set is a complete Heyting algebra. Then we construct the $\mathcal{L}$ unitary semi-group monad and the $\mathcal{L}$ unitary semi-group T algebra. Moreover, we discuss the adjoint of the $\mathcal{L}$ product functor F and the $\mathcal{L}$ unitary semi-group unit functor G, and prove that the corresponding $\mathcal{L}$ comparison functor K is an isomorphism, finally we prove that the $\mathcal{L}$ unitary semi-group unit functor G is $\mathcal{L}$ monadic.

Keywords: category of $\mathcal{L}$ sets; $\mathcal{L}$ unitary semi-group monad; $\mathcal{L}$ unitary semi-group T algebra; $\mathcal{L}$ monadic

Received: 13 May 2009. **Accepted:** 26 May 2010.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10871137); 2008 Undergraduate's Scientific Research Project of Yili Normal University (2008XS06).